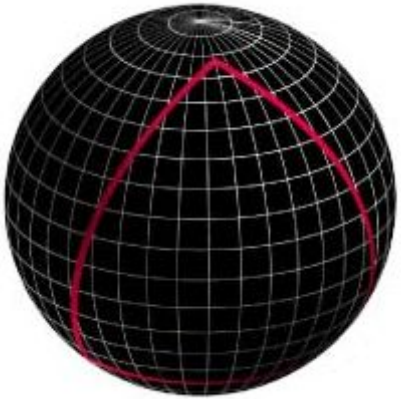
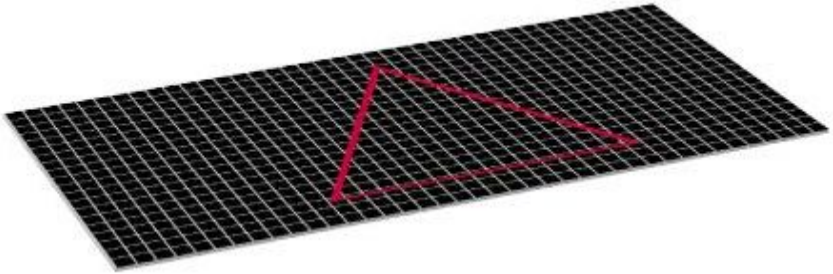
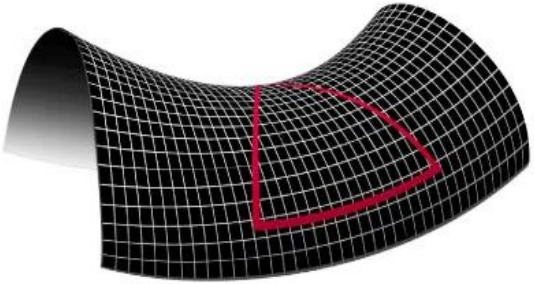






Geometria Elíptica e Hiperbólica - um comparativo

Victor Luiz Martins de Sousa - nUSP 8425329

Orientador - Prof. Dr. Francisco Rui Tavares de Almeida

Sumário

Variedades Riemannianas:

-Estrutura Diferenciável
-Espaço Tangente
-Métrica Riemanniana
-Derivada Covariante
-Geodésicas
-Curvatura

Sumário

Variedades Riemannianas:

-Estrutura Diferenciável
-Espaço Tangente
-Métrica Riemanniana
-Derivada Covariante
-Geodésicas
-Curvatura

Plano Euclidiano, Plano Hiperbólico e Esfera mergulhada em R^3:

-sob a ótica da Geometria Riemanniana
-Geometria Hiperbólica (axiomas e modelo/consistência)
-Geometria Elíptica (axiomas e modelo/consistência)

VARIEDADES RIEMANNIANAS

VARIEDADES RIEMANNIANAS

Uma variedade é, falando de maneira imprecisa, um espaço que localmente se parece com o $\mathbb{R}^n$ e onde podemos aplicar os conhecimentos de cálculo para, por exemplo, derivar funções.

VARIEDADES RIEMANNIANAS

Uma variedade é, falando de maneira imprecisa, um espaço que localmente se parece com o $\mathbb{R}^n$ e onde podemos aplicar os conhecimentos de cálculo para, por exemplo, derivar funções.

Objetivo inicial:

-Tornar preciso o conceito de Variedade Riemanniana

-Mostrar que as geometrias de objetos como o plano Euclidiano, Hiperbólico, ou a Esfera S^2 são bastante distintas em algum sentido, mas são casos particulares da geometria Riemanniana.

Estrutura Diferencial

Estrutura Diferencial

chamaremos de M espaços localmente euclideanos de dimensão n.

Estrutura Diferencial

chamaremos de M espaços localmente euclideanos de dimensão n.

Definição 1.1.1. Dizemos que as cartas (U, φ) e (V, ψ) são compatíveis de classe C^∞ se $U \cap V = \emptyset$ ou, caso $U \cap V \neq \emptyset$, se

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V) \quad \text{e} \quad \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V),$$

são funções de classe C^∞.

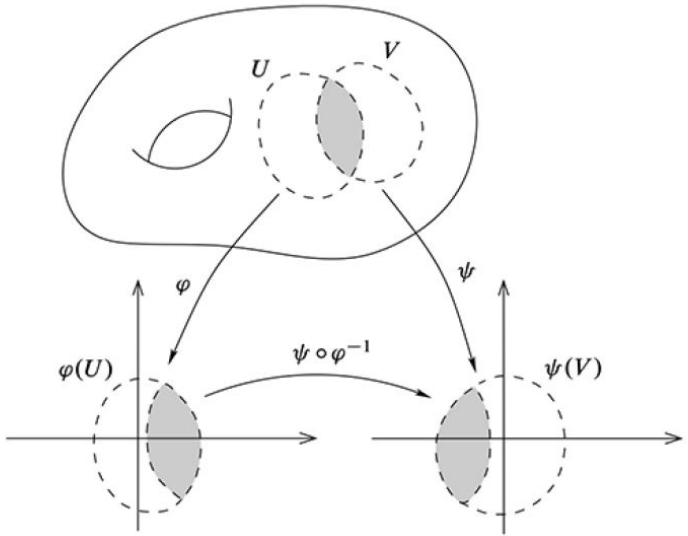
Estrutura Diferencial

chamaremos de M espaços localmente euclideanos de dimensão n.

Definição 1.1.1. Dizemos que as cartas (U, φ) e (V, ψ) são compatíveis de classe C^∞ se $U \cap V = \emptyset$ ou, caso $U \cap V \neq \emptyset$, se

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V) \quad \text{e} \quad \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V),$$

são funções de classe C^∞.



Estrutura Diferencial

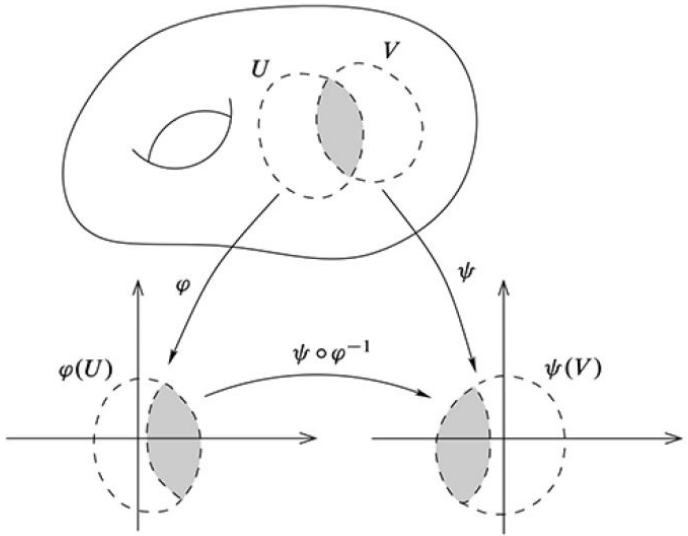
chamaremos de M espaços localmente euclideanos de dimensão n.

Definição 1.1.1. Dizemos que as cartas (U, φ) e (V, ψ) são compatíveis de classe C^∞ se $U \cap V = \emptyset$ ou, caso $U \cap V \neq \emptyset$, se

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V) \quad \text{e} \quad \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V),$$

são funções de classe C^∞.

Definição 1.1.2. Um atlas $\mathfrak{A}$ em uma variedade topológica M é uma coleção de cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ que são compatíveis de classe C^∞ e que cobrem M, i.e., $\cup_\alpha U_\alpha = M$.



Estrutura Diferencial

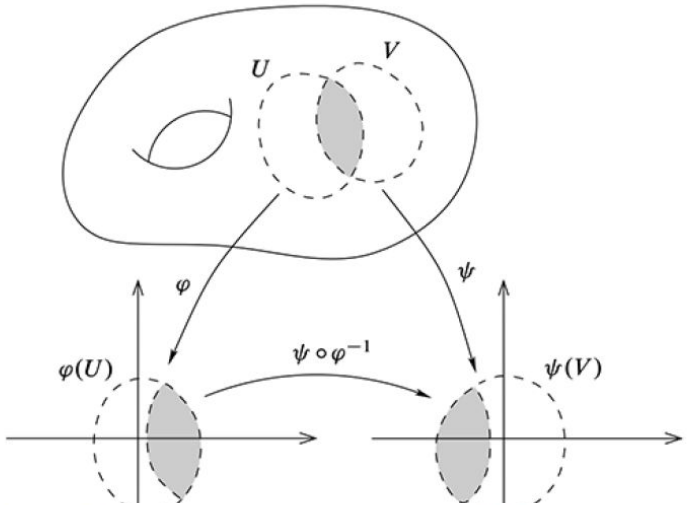
chamaremos de M espaços localmente euclideanos de dimensão n.

Definição 1.1.1. Dizemos que as cartas (U, φ) e (V, ψ) são compatíveis de classe C^∞ se $U \cap V = \emptyset$ ou, caso $U \cap V \neq \emptyset$, se

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V) \quad \text{e} \quad \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V),$$

são funções de classe C^∞.

Definição 1.1.2. Um atlas $\mathfrak{A}$ em uma variedade topológica M é uma coleção de cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ que são compatíveis de classe C^∞ e que cobrem M, i.e., $\cup_\alpha U_\alpha = M$.



Lema 1.1.1. A noção de compatibilidade de classe C^∞ define uma relação de equivalência entre atlas.

Estrutura Diferencial

Estrutura Diferencial

Dizemos que um atlas $\mathfrak{A}$ é *maximal* caso este não esteja propriamente contido em nenhum outro atlas.

Proposição 1.1.1. Todo atlas está contido em um único atlas maximal.

Estrutura Diferencial

Dizemos que um atlas $\mathfrak{A}$ é *maximal* caso este não esteja propriamente contido em nenhum outro atlas.

Proposição 1.1.1. Todo atlas está contido em um único atlas maximal.

Definição 1.1.3. M é uma variedade de classe C^∞ de dimensão n se M é uma variedade topológica de dimensão n munida de um atlas maximal. Nos referimos ao atlas maximal como estrutura diferenciável.

Estrutura Diferencial

Dizemos que um atlas $\mathfrak{A}$ é *maximal* caso este não esteja propriamente contido em nenhum outro atlas.

Proposição 1.1.1. Todo atlas está contido em um único atlas maximal.

Definição 1.1.3. M é uma variedade de classe C^∞ de dimensão n se M é uma variedade topológica de dimensão n munida de um atlas maximal. Nos referimos ao atlas maximal como estrutura diferenciável.

Definição 1.1.4. Uma função $f : M \to \mathbb{R}$ é dita ser de classe C^∞ em um ponto p em M existe uma carta (U, φ) em p tal que $f \circ \varphi^{-1}$ é de classe C^∞ em $\varphi(p)$. A mesma função é dita de classe C^∞ se o for para todo $p \in M$.

Estrutura Diferencial

Dizemos que um atlas $\mathfrak{A}$ é *maximal* caso este não esteja propriamente contido em nenhum outro atlas.

Proposição 1.1.1. Todo atlas está contido em um único atlas maximal.

Definição 1.1.3. M é uma variedade de classe C^∞ de dimensão n se M é uma variedade topológica de dimensão n munida de um atlas maximal. Nos referimos ao atlas maximal como estrutura diferenciável.

Definição 1.1.4. Uma função $f : M \to \mathbb{R}$ é dita ser de classe C^∞ em um ponto p em M existe uma carta (U, φ) em p tal que $f \circ \varphi^{-1}$ é de classe C^∞ em $\varphi(p)$. A mesma função é dita de classe C^∞ se o for para todo $p \in M$.

Definição 1.1.5. Sejam M, N duas variedades de classe C^∞ e $F : M \to N$ uma função. F é dita ser de classe C^∞ em um ponto $p \in M$ se existem cartas (U, φ) em p e (V, ψ) em $F(p)$ tal que $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ é de classe C^∞ em p. A mesma função é dita de classe C^∞ se for de classe C^∞ para todo ponto p.

Espaço Tangente

Espaço Tangente

Definição 1.2.1. Seja M uma variedade de classe C^∞ de dimensão n. Um vetor tangente a um ponto p é uma função $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes propriedades

- $v(f+g) = v(f) + v(g)$, para qualquer $f, g \in C^\infty(M)$;
- $v(\lambda f) = \lambda v(f)$, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in C^\infty(M)$;
- $v(fg) = f(p)v(g) + v(f)g(p)$, para qualquer $f, g \in C^\infty(M)$.

Espaço Tangente

Definição 1.2.1. Seja M uma variedade de classe C^∞ de dimensão n. Um vetor tangente a um ponto p é uma função $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes propriedades

- $v(f+g) = v(f) + v(g)$, para qualquer $f, g \in C^\infty(M)$;
- $v(\lambda f) = \lambda v(f)$, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in C^\infty(M)$;
- $v(fg) = f(p)v(g) + v(f)g(p)$, para qualquer $f, g \in C^\infty(M)$.

O conjunto de todos os vetores tangentes

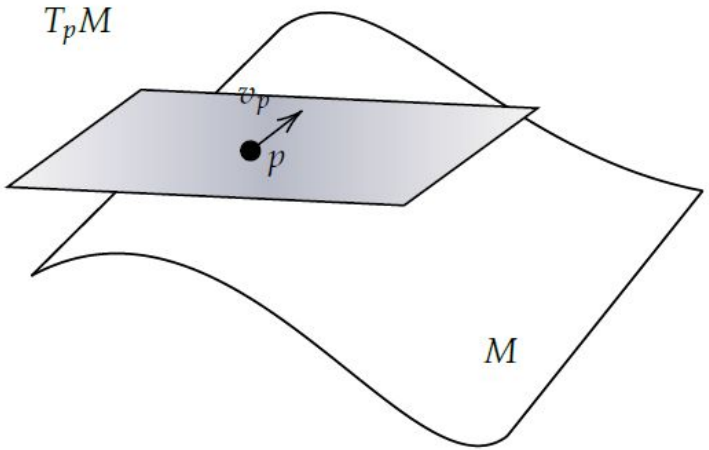
a p são denotados por T_pM.

Espaço Tangente

Definição 1.2.1. Seja M uma variedade de classe C^∞ de dimensão n. Um vetor tangente a um ponto p é uma função $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes propriedades

- $v(f+g) = v(f) + v(g)$, para qualquer $f, g \in C^\infty(M)$;
- $v(\lambda f) = \lambda v(f)$, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in C^\infty(M)$;
- $v(fg) = f(p)v(g) + v(f)g(p)$, para qualquer $f, g \in C^\infty(M)$.

O conjunto de todos os vetores tangentes a p são denotados por T_pM.



Espaço Tangente

Espaço Tangente

Proposição 1.2.1. Seja M uma variedade de dimensão n e $p \in M$ um ponto junto de uma carta (U, φ) em p. Então, as derivadas parciais $\partial_i|_p$ formam uma base para T_pM.

Espaço Tangente

Proposição 1.2.1. Seja M uma variedade de dimensão n e $p \in M$ um ponto junto de uma carta (U, φ) em p. Então, as derivadas parciais $\partial_i|_p$ formam uma base para T_pM.

O fibrado tangente TM é definido como a união disjunta dos espaços tangentes T_pM, i.e., cada elemento de TM é uma dupla (p, v_p) onde p é um ponto de M e $v_p \in T_pM$. Um *campo de vetores* $v : M \to TM$ é uma função tal que $v(p) \in T_pM$ de maneira de classe C^∞.

Espaço Tangente

Proposição 1.2.1. Seja M uma variedade de dimensão n e $p \in M$ um ponto junto de uma carta (U, φ) em p. Então, as derivadas parciais $\partial_i|_p$ formam uma base para T_pM.

O fibrado tangente TM é definido como a união disjunta dos espaços tangentes T_pM, i.e., cada elemento de TM é uma dupla (p, v_p) onde p é um ponto de M e $v_p \in T_pM$. Um *campo de vetores* $v : M \to TM$ é uma função tal que $v(p) \in T_pM$ de maneira de classe C^∞.

O conjunto de todos os campos de vetores será denotado por $\mathcal{X}(M)$.

Métrica Riemanniana

Métrica Riemanniana

Seja M uma variedade de classe C^∞ de dimensão n. Uma métrica riemanniana $g : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M)$ é uma função satisfazendo as seguintes propriedades

- Para todos $v, u \in \mathcal{X}(M)$ vale que $g(u, v) = g(v, u)$.
- Para todo $v \in \mathcal{X}(M)$ tal que $v \neq 0$ temos que $g(v, v) > 0$.
- Para cada $p \in M$, temos que $g(u(p), v(p))$ é bilinear.

Métrica Riemanniana

Seja M uma variedade de classe C^∞ de dimensão n. Uma métrica riemanniana $g : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M)$ é uma função satisfazendo as seguintes propriedades

- Para todos $v, u \in \mathcal{X}(M)$ vale que $g(u, v) = g(v, u)$.
- Para todo $v \in \mathcal{X}(M)$ tal que $v \neq 0$ temos que $g(v, v) > 0$.
- Para cada $p \in M$, temos que $g(u(p), v(p))$ é bilinear.

Exemplo 1.3.1. Seja $\mathbb{R}^n$ o espaço euclidiano usual. A métrica é dada pela expressão

$$g = \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2, \text{ onde } g_{ij} = \delta_{ij}.$$

Métrica Riemanniana

Seja M uma variedade de classe C^∞ de dimensão n. Uma métrica riemanniana $g : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M)$ é uma função satisfazendo as seguintes propriedades

- Para todos $v, u \in \mathcal{X}(M)$ vale que $g(u, v) = g(v, u)$.
- Para todo $v \in \mathcal{X}(M)$ tal que $v \neq 0$ temos que $g(v, v) > 0$.
- Para cada $p \in M$, temos que $g(u(p), v(p))$ é bilinear.

Exemplo 1.3.1. Seja $\mathbb{R}^n$ o espaço euclidiano usual. A métrica é dada pela expressão

$$g = \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2, \text{ onde } g_{ij} = \delta_{ij}.$$

Proposição 1.3.1. Toda variedade de classe C^∞ M de dimensão n possui uma métrica riemanniana.

Dem: (Usa partições da Unidade)

Derivada Covariante

Derivada Covariante

Definição 1.4.1. Seja M uma variedade de classe C^∞. Uma conexão afim $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ é uma aplicação satisfazendo as seguintes propriedades

- $\nabla_{fv+gu}(w) = f\nabla_v(w) + g\nabla_u(w)$
- $\nabla_v(u+w) = \nabla_v(u) + \nabla_v(w)$
- $\nabla_v(fu) = f\nabla_v(u) + v(f)u$

onde $u, v, w \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$.

Derivada Covariante

Definição 1.4.1. Seja M uma variedade de classe C^∞. Uma conexão afim $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ é uma aplicação satisfazendo as seguintes propriedades

- $\nabla_{fv+gu}(w) = f\nabla_v(w) + g\nabla_u(w)$
- $\nabla_v(u+w) = \nabla_v(u) + \nabla_v(w)$
- $\nabla_v(fu) = f\nabla_v(u) + v(f)u$

onde $u, v, w \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$.

Lema 1.4.1. Suponha que M seja uma variedade de classe C^∞ cujo atlas tem apenas uma carta. Então existe uma correspondência bijetiva entre conexões afins em M e funções de classe C^∞ Γ_{ij}^k tais que

$$\nabla_v(u) = (v^i \partial_i u^k + v^i u^j \Gamma_{ij}^k)\partial_k, \tag{1.4.1}$$

onde as funções de classe C^∞ Γ_{ij}^k são conhecidos os *símbolos de Christoffel*.

Derivada Covariante

Definição 1.4.1. Seja M uma variedade de classe C^∞. Uma conexão afim $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ é uma aplicação satisfazendo as seguintes propriedades

- $\nabla_{fv+gu}(w) = f\nabla_v(w) + g\nabla_u(w)$
- $\nabla_v(u+w) = \nabla_v(u) + \nabla_v(w)$
- $\nabla_v(fu) = f\nabla_v(u) + v(f)u$

onde $u, v, w \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$.

Lema 1.4.1. Suponha que M seja uma variedade de classe C^∞ cujo atlas tem apenas uma carta. Então existe uma correspondência bijetiva entre conexões afins em M e funções de classe C^∞ Γ_{ij}^k tais que

$$\nabla_v(u) = (v^i \partial_i u^k + v^i u^j \Gamma_{ij}^k)\partial_k, \tag{1.4.1}$$

onde as funções de classe C^∞ Γ_{ij}^k são conhecidos os *símbolos de Christoffel*.

Proposição 1.4.1. Toda variedade de classe C^∞ M admite uma conexão afim.

Derivada Covariante

Derivada Covariante

Definição 1.4.2. Seja M uma variedade de classe C^∞, ∇ uma conexão afim. Dada uma curva de classe C^∞ $\gamma : [0,1] \to M$ e v um campo de vetores ao longo de γ, a derivada covariante D ao longo da curva γ é um operador D_t satisfazendo as seguintes propriedades

- $D_t(v+w) = D_t(v) + D_t(w)$, onde w é um campo de vetores ao longo de γ;
- $D_t(fV) = \frac{df}{dt}v + fD_t(v)$, onde $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável.
- Caso v seja induzido por um campo de vetores w, temos que

$$D_t(v) = \nabla_{\gamma'}(w).$$

Derivada Covariante

Definição 1.4.2. Seja M uma variedade de classe C^∞, ∇ uma conexão afim. Dada uma curva de classe C^∞ $\gamma : [0,1] \to M$ e v um campo de vetores ao longo de γ, a derivada covariante D ao longo da curva γ é um operador D_t satisfazendo as seguintes propriedades

- $D_t(v+w) = D_t(v) + D_t(w)$, onde w é um campo de vetores ao longo de γ;
- $D_t(fV) = \frac{df}{dt}v + fD_t(v)$, onde $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável.
- Caso v seja induzido por um campo de vetores w, temos que

$$D_t(v) = \nabla_{\gamma'}(w).$$

Proposição 1.4.2. Seja M uma variedade de classe C^∞ com uma conexão afim ∇. Então existe apenas um operador derivada covariante D_t compatível esta conexão.

Derivada Covariante

Definição 1.4.2. Seja M uma variedade de classe C^∞, ∇ uma conexão afim. Dada uma curva de classe C^∞ $\gamma : [0,1] \to M$ e v um campo de vetores ao longo de γ, a derivada covariante D ao longo da curva γ é um operador D_t satisfazendo as seguintes propriedades

- $D_t(v+w) = D_t(v) + D_t(w)$, onde w é um campo de vetores ao longo de γ;
- $D_t(fV) = \frac{df}{dt}v + fD_t(v)$, onde $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável.
- Caso v seja induzido por um campo de vetores w, temos que

$$D_t(v) = \nabla_{\gamma'}(w).$$

Proposição 1.4.2. Seja M uma variedade de classe C^∞ com uma conexão afim ∇. Então existe apenas um operador derivada covariante D_t compatível esta conexão.

Teorema 1.4.1. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Existe uma única conexão afim simétrica em M que é compatível com a métrica g.

Derivada Covariante

Definição 1.4.2. Seja M uma variedade de classe C^∞, ∇ uma conexão afim. Dada uma curva de classe C^∞ $\gamma : [0,1] \to M$ e v um campo de vetores ao longo de γ, a derivada covariante D ao longo da curva γ é um operador D_t satisfazendo as seguintes propriedades

- $D_t(v+w) = D_t(v) + D_t(w)$, onde w é um campo de vetores ao longo de γ;
- $D_t(fV) = \frac{df}{dt}v + fD_t(v)$, onde $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável.
- Caso v seja induzido por um campo de vetores w, temos que

$$D_t(v) = \nabla_{\gamma'}(w).$$

Proposição 1.4.2. Seja M uma variedade de classe C^∞ com uma conexão afim ∇. Então existe apenas um operador derivada covariante D_t compatível esta conexão.

Teorema 1.4.1. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Existe uma única conexão afim simétrica em M que é compatível com a métrica g.

Chegamos a seguinte expressão para os símbolos de Christoffel $\Gamma_{ij}^k = \frac{g^{kl}}{2}(\partial_l g_{ij} - \partial_i g_{jl} - \partial_j g_{li})$.

Geodésicas

Geodésicas

Uma *geodésica* em M é uma curva, que sempre iremos admitir sendo de classe C^∞, $\gamma : I \to M$, onde I é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, tal que $D_t\gamma' = 0$, para todo $t \in I$

Geodésicas

Uma *geodésica* em M é uma curva, que sempre iremos admitir sendo de classe C^∞, $\gamma : I \to M$, onde I é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, tal que $D_t\gamma' = 0$, para todo $t \in I$

Definição 1.5.1. Uma curva $\gamma : I \to M$ é dita regular caso $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. A curva é dita admissível se existem uma partição de I em intervalos I_j tal que γ restrita a I_j é regular.

Geodésicas

Uma *geodésica* em M é uma curva, que sempre iremos admitir sendo de classe C^∞, $\gamma : I \to M$, onde I é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, tal que $D_t\gamma' = 0$, para todo $t \in I$

Definição 1.5.1. Uma curva $\gamma : I \to M$ é dita regular caso $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. A curva é dita admissível se existem uma partição de I em intervalos I_j tal que γ restrita a I_j é regular.

Definição 1.5.2. Seja M uma variedade Riemanniana conexa de dimensão n e $p, q \in M$. Então a distância riemanniana $d(p,q)$ é definida por

$$d(p,q) = \inf\{L(\gamma) : \gamma : [a,b] \to M \text{ é admissível}, \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}.$$

Geodésicas

Uma *geodésica* em M é uma curva, que sempre iremos admitir sendo de classe C^∞, $\gamma : I \to M$, onde I é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, tal que $D_t\gamma' = 0$, para todo $t \in I$

Definição 1.5.1. Uma curva $\gamma : I \to M$ é dita regular caso $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. A curva é dita admissível se existem uma partição de I em intervalos I_j tal que γ restrita a I_j é regular.

Definição 1.5.2. Seja M uma variedade Riemanniana conexa de dimensão n e $p, q \in M$. Então a distância riemanniana $d(p,q)$ é definida por

$$d(p,q) = \inf\{L(\gamma) : \gamma : [a,b] \to M \text{ é admissível}, \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}.$$

Uma curva admissível $\gamma : [a,b] \to M$ é dita minimizante se $L(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b))$.

Geodésicas

Uma *geodésica* em M é uma curva, que sempre iremos admitir sendo de classe C^∞, $\gamma : I \to M$, onde I é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, tal que $D_t\gamma' = 0$, para todo $t \in I$

Definição 1.5.1. Uma curva $\gamma : I \to M$ é dita regular caso $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. A curva é dita admissível se existem uma partição de I em intervalos I_j tal que γ restrita a I_j é regular.

Definição 1.5.2. Seja M uma variedade Riemanniana conexa de dimensão n e $p, q \in M$. Então a distância riemanniana $d(p,q)$ é definida por

$$d(p,q) = \inf\{L(\gamma) : \gamma : [a,b] \to M \text{ é admissível}, \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}.$$

Uma curva admissível $\gamma : [a,b] \to M$ é dita minimizante se $L(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b))$.

Teorema 1.5.2. Uma curva é geodésica se e somente se for minimizante.

Curvatura

Curvatura

Definição 1.6.1. A curvatura de uma variedade Riemanniana (M, g) é uma aplicação $R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ dada por

$$R(v, u)w = \nabla_u \nabla_v(w) - \nabla_v \nabla_u(w) + \nabla_{[v,u]}(w)$$

Curvatura

Definição 1.6.1. A curvatura de uma variedade Riemanniana (M, g) é uma aplicação $R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ dada por

$$R(v,u)w = \nabla_u \nabla_v(w) - \nabla_v \nabla_u(w) + \nabla_{[v,u]}(w)$$

a curvatura em termos dos símbolos de Christoffel

$$R^l_{ijk} = \Gamma^s_{ik}\Gamma^l_{js} - \Gamma^s_{jk}\Gamma^l_{is} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^l_{ik} + \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^l_{jk}.$$

Curvatura

Definição 1.6.1. A curvatura de uma variedade Riemanniana (M, g) é uma aplicação $R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ dada por

$$R(v,u)w = \nabla_u \nabla_v(w) - \nabla_v \nabla_u(w) + \nabla_{[v,u]}(w)$$

a curvatura em termos dos símbolos de Christoffel

$$R^l_{ijk} = \Gamma^s_{ik}\Gamma^l_{js} - \Gamma^s_{jk}\Gamma^l_{is} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^l_{ik} + \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^l_{jk}.$$

Definição 1.6.2. Seja (M, g) uma variedade riemanniana de dimensão $n \geq 2$ e $W \subset T_pM$ um subspaço bidimensional do espaço tangente. A curvatura seccional é definida por

$$K(W) = \frac{(u,v,v,u)}{g(u,u)g(v,v) - g(u,v)^2}$$

Curvatura

Definição 1.6.1. A curvatura de uma variedade Riemanniana (M, g) é uma aplicação $R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ dada por

$$R(v,u)w = \nabla_u \nabla_v(w) - \nabla_v \nabla_u(w) + \nabla_{[v,u]}(w)$$

a curvatura em termos dos símbolos de Christoffel

$$R^l_{ijk} = \Gamma^s_{ik}\Gamma^l_{js} - \Gamma^s_{jk}\Gamma^l_{is} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^l_{ik} + \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^l_{jk}.$$

Definição 1.6.2. Seja (M, g) uma variedade riemanniana de dimensão $n \geq 2$ e $W \subset T_pM$ um subspaço bidimensional do espaço tangente. A curvatura seccional é definida por

$$K(W) = \frac{(u,v,v,u)}{g(u,u)g(v,v) - g(u,v)^2}$$

Proposição 1.6.3. A definição de curvatura seccional não depende da escolha de vetores u, v.

AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Os Elementos - Trabalho fundamental de síntese e estruturação de resultados conhecidos

AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Os Elementos - Trabalho fundamental de síntese e estruturação de resultados conhecidos

Postulado V (versão Playfair): Por um ponto fora de uma reta, pode-se traçar uma ÚNICA reta paralela

AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Os Elementos - Trabalho fundamental de síntese e estruturação de resultados conhecidos

Postulado V (versão Playfair): Por um ponto fora de uma reta, pode-se traçar uma ÚNICA reta paralela

Tentativas de provar: Proclus, Legendre e Saccheri

AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Os Elementos - Trabalho fundamental de síntese e estruturação de resultados conhecidos

Postulado V (versão Playfair): Por um ponto fora de uma reta, pode-se traçar uma ÚNICA reta paralela

Tentativas de provar: Proclus, Legendre e Saccheri

Produção de geometrias alternativas: Gauss, Bolyai (filho), Lobachevsky.

AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Os Elementos - Trabalho fundamental de síntese e estruturação de resultados conhecidos

Postulado V (versão Playfair): Por um ponto fora de uma reta, pode-se traçar uma ÚNICA reta paralela

Tentativas de provar: Proclus, Legendre e Saccheri

Produção de geometrias alternativas: Gauss, Bolyai (filho), Lobachevsky.

Campo ganhou reconhecimento a partir dos trabalhos de Riemann

AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Os Elementos - Trabalho fundamental de síntese e estruturação de resultados conhecidos

Postulado V (versão Playfair): Por um ponto fora de uma reta, pode-se traçar uma ÚNICA reta paralela

Tentativas de provar: Proclus, Legendre e Saccheri

Produção de geometrias alternativas: Gauss, Bolyai (filho), Lobachevsky.

Campo ganhou reconhecimento a partir dos trabalhos de Riemann

Importantes para o mundo físico: Einstein e Pointcaré.

Plano R^2

Plano R^2

- Para o plano $\mathbb{R}^2$, iremos considerar a métrica dada por

$$g_{\mathbb{R}^2} = dx^2 + dy^2,$$

onde $dx^2 = dx \otimes dx$.

$$(g_{\mathbb{R}^2})_{xx} = g_{\mathbb{R}^2}(\partial_x, \partial_x) = dx^2(\partial_x, \partial_x) + dy^2(\partial_x, \partial_x) = 1 + 0 = 1$$
$$(g_{\mathbb{R}^2})_{yy} = g_{\mathbb{R}^2}(\partial_y, \partial_y) = dx^2(\partial_y, \partial_y) + dy^2(\partial_y, \partial_y) = 0 + 1 = 1$$
$$(g_{\mathbb{R}^2})_{xy} = (g_{\mathbb{R}^2})_{yx} = 0$$

$$g_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Plano R^2

- Para o plano $\mathbb{R}^2$, iremos considerar a métrica dada por

$$g_{\mathbb{R}^2} = dx^2 + dy^2,$$

onde $dx^2 = dx \otimes dx$.

$$(g_{\mathbb{R}^2})_{xx} = g_{\mathbb{R}^2}(\partial_x, \partial_x) = dx^2(\partial_x, \partial_x) + dy^2(\partial_x, \partial_x) = 1 + 0 = 1$$
$$(g_{\mathbb{R}^2})_{yy} = g_{\mathbb{R}^2}(\partial_y, \partial_y) = dx^2(\partial_y, \partial_y) + dy^2(\partial_y, \partial_y) = 0 + 1 = 1$$
$$(g_{\mathbb{R}^2})_{xy} = (g_{\mathbb{R}^2})_{yx} = 0$$

$$g_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como esta expressão para o plano envolvem derivadas e os coeficientes da matriz associada a $g_{\mathbb{R}^2}$ são constantes temos que $\Gamma^k_{ij} = 0$ para toda combinação de índices.

Isso torna as equações das geodésicas simples de se resolver. Estas se tornam $\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt} = 0,$

Se estamos tentando calcular a geodésica que liga o ponto (x_0, y_0) ao ponto (x_1, y_1) temos que a geodésica $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ se torna

$$\gamma(t) = ((x_1 - x_0)t + x_0, (y_1 - y_0)t + y_0)$$

Plano R^2

- Para o plano $\mathbb{R}^2$, iremos considerar a métrica dada por

$$g_{\mathbb{R}^2} = dx^2 + dy^2,$$

onde $dx^2 = dx \otimes dx$.

$$(g_{\mathbb{R}^2})_{xx} = g_{\mathbb{R}^2}(\partial_x, \partial_x) = dx^2(\partial_x, \partial_x) + dy^2(\partial_x, \partial_x) = 1 + 0 = 1$$
$$(g_{\mathbb{R}^2})_{yy} = g_{\mathbb{R}^2}(\partial_y, \partial_y) = dx^2(\partial_y, \partial_y) + dy^2(\partial_y, \partial_y) = 0 + 1 = 1$$
$$(g_{\mathbb{R}^2})_{xy} = (g_{\mathbb{R}^2})_{yx} = 0$$

$$g_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como esta expressão para o plano envolvem derivadas e os coeficientes da matriz associada a $g_{\mathbb{R}^2}$ são constantes temos que $\Gamma^k_{ij} = 0$ para toda combinação de índices.

Isso torna as equações das geodésicas simples de se resolver. Estas se tornam $\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt} = 0,$

Se estamos tentando calcular a geodésica que liga o ponto (x_0, y_0) ao ponto (x_1, y_1) temos que a geodésica $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ se torna

$$\gamma(t) = ((x_1 - x_0)t + x_0, (y_1 - y_0)t + y_0)$$

temos que a curvatura $R = 0$ para o plano.

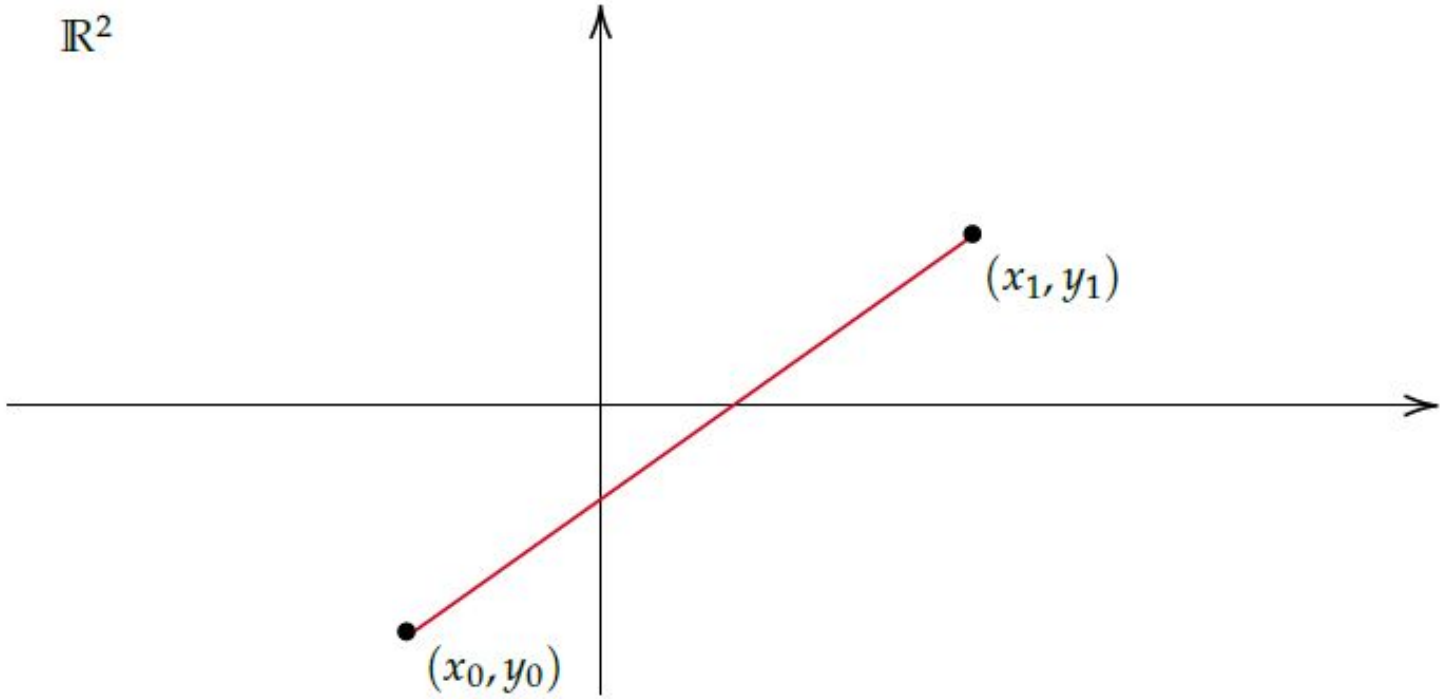


Figura 2.1: Geodésica ligando dois pontos no plano.

Esfera S^2

A mudança de coordenadas é dada, neste caso, pela seguinte aplicação

$$x = \cos(\phi)\sin(\theta), y = \sin(\phi)\sin(\theta), z = \cos(\theta).$$

Esfera S^2

A mudança de coordenadas é dada, neste caso, pela seguinte aplicação

$$x = \cos(\phi)\sin(\theta), y = \sin(\phi)\sin(\theta), z = \cos(\theta).$$

- Para a esfera S^2 a métrica será

$$g_{S^2} = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$$

$$(g_{S^2})_{\theta\theta} = g_{S^2}(\partial_\theta, \partial_\theta) = d\theta^2(\partial_\theta, \partial_\theta) + \sin^2(\theta)d\phi^2(\partial_\theta, \partial_\theta) = 1 + 0 = 1$$

$$(g_{S^2})_{\phi\phi} = g_{S^2}(\partial_\phi, \partial_\phi) = d\theta^2(\partial_\phi, \partial_\phi) + \sin^2(\theta)d\phi^2(\partial_\phi, \partial_\phi) = 0 + \sin^2(\theta) = \sin^2(\theta)$$

$$(g_{S^2})_{\theta\phi} = (g_{S^2})_{\phi\theta} = 0$$

$$g_{S^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Esfera S^2

A mudança de coordenadas é dada, neste caso, pela seguinte aplicação

$$x = \cos(\phi)\sin(\theta), y = \sin(\phi)\sin(\theta), z = \cos(\theta).$$

- Para a esfera S^2 a métrica será

$$g_{S^2} = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$$

$$(g_{S^2})_{\theta\theta} = g_{S^2}(\partial_\theta, \partial_\theta) = d\theta^2(\partial_\theta, \partial_\theta) + \sin^2(\theta)d\phi^2(\partial_\theta, \partial_\theta) = 1 + 0 = 1$$
$$(g_{S^2})_{\phi\phi} = g_{S^2}(\partial_\phi, \partial_\phi) = d\theta^2(\partial_\phi, \partial_\phi) + \sin^2(\theta)d\phi^2(\partial_\phi, \partial_\phi) = 0 + \sin^2(\theta) = \sin^2(\theta)$$
$$(g_{S^2})_{\theta\phi} = (g_{S^2})_{\phi\theta} = 0$$

$$g_{S^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Começaremos os cálculos para a esfera. Quando $k = \theta$, os símbolos são

$$\Gamma^\theta_{\theta\theta} = 0, \quad \Gamma^\theta_{\phi\theta} = 0, \quad \Gamma^\theta_{\theta\phi} = 0, \quad \Gamma^\theta_{\phi\phi} = \sin(\theta)\cos(\theta)$$

Para $k = \phi$, obtemos

$$\Gamma^\phi_{\theta\theta} = 0, \Gamma^\phi_{\phi\theta} = -\text{cotg}(\theta), \quad \Gamma^\phi_{\theta\phi} = -\text{cotg}(\theta), \quad \Gamma^\phi_{\phi\phi} = 0,$$

$$\phi - \phi_0 = \cos^{-1}\left(\frac{C\,\text{cotg}(\theta)}{\sqrt{1 - C^2}}\right).$$

Sabemos que a equação geral de um plano que atravessa a origem é
$ax + by + cz = 0$, para a, b, c números reais.

Sabemos que a equação geral de um plano que atravessa a origem é
$ax + by + cz = 0$, para a, b, c números reais.

Sabendo que na esfera os pontos $(x, y, z) = (\cos(\phi)\sin(\theta), \sin(\phi)\sin(\theta), \cos(\theta))$,
portanto temos que

$$a\cos(\phi)\sin(\theta) + b\sin(\phi)\sin(\theta) + c\cos(\theta) = 0 \Longrightarrow a\cos(\phi) + b\sin(\phi) = -c\text{cotg}(\theta)$$

Sabemos que a equação geral de um plano que atravessa a origem é
$ax + by + cz = 0$, para a, b, c números reais.

Sabendo que na esfera os pontos $(x, y, z) = (\cos(\phi)\sin(\theta), \sin(\phi)\sin(\theta), \cos(\theta))$,
portanto temos que

$$a\cos(\phi)\sin(\theta) + b\sin(\phi)\sin(\theta) + c\cos(\theta) = 0 \Longrightarrow a\cos(\phi) + b\sin(\phi) = -c\text{cotg}(\theta)$$

Sabemos que existe um ângulo ϕ_0 tal que $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos(\phi_0)$ e $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin(\phi_0)$, e

$$\cos(\phi - \phi_0) = -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\text{cotg}(\theta),$$

Sabemos que a equação geral de um plano que atravessa a origem é
$ax + by + cz = 0$, para a, b, c números reais.

Sabendo que na esfera os pontos $(x, y, z) = (\cos(\phi)\sin(\theta), \sin(\phi)\sin(\theta), \cos(\theta))$,
portanto temos que

$$a\cos(\phi)\sin(\theta) + b\sin(\phi)\sin(\theta) + c\cos(\theta) = 0 \Longrightarrow a\cos(\phi) + b\sin(\phi) = -c\text{cotg}(\theta)$$

Sabemos que existe um ângulo ϕ_0 tal que $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos(\phi_0)$ e $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin(\phi_0)$, e

$$\cos(\phi - \phi_0) = -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\text{cotg}(\theta),$$

$$K = \frac{(-\cos^2(\theta) - \cos(2\theta)\sin^2(\theta))}{\sin^4(\theta)} = 1$$

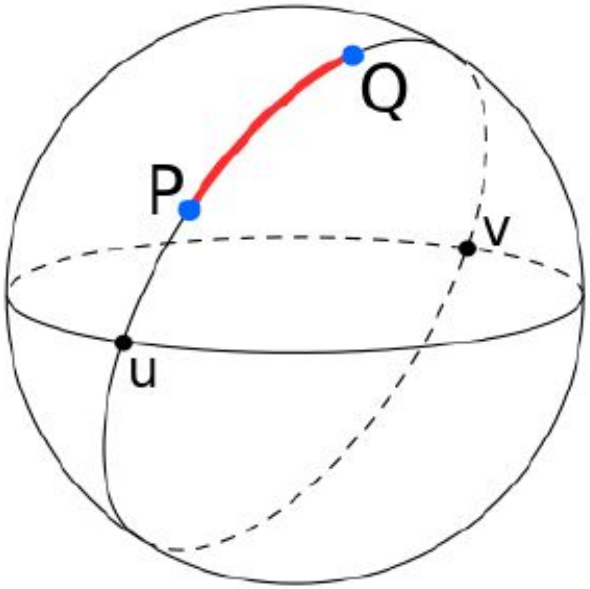


Figura 2.2: Um segmento do grande círculo ligando dois pontos na esfera.

Plano H^2

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\},$$

Plano H^2

$$\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\},$$

- Para o plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$, iremos considerar a seguinte métrica

$$g_{\mathbb{H}^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

$$(g_{\mathbb{H}^2})_{xx} = g_{\mathbb{H}^2}(\partial_x, \partial_x) = \frac{dx^2(\partial_x,\partial_x) + dy^2(\partial_x,\partial_x)}{y^2} = \frac{1+0}{y^2} = \frac{1}{y^2}$$

$$(g_{\mathbb{H}^2})_{yy} = g_{\mathbb{H}^2}(\partial_y, \partial_y) = \frac{dx^2(\partial_y,\partial_y) + dy^2(\partial_y,\partial_y)}{y^2} = \frac{0+1}{y^2} = \frac{1}{y^2}$$

$$(g_{\mathbb{H}^2})_{xy} = (g_{\mathbb{H}^2})_{yx} = 0$$

$$g_{\mathbb{H}^2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

Plano H^2

$$\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\},$$

- Para o plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$, iremos considerar a seguinte métrica

$$g_{\mathbb{H}^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

$$(g_{\mathbb{H}^2})_{xx} = g_{\mathbb{H}^2}(\partial_x, \partial_x) = \frac{dx^2(\partial_x,\partial_x) + dy^2(\partial_x,\partial_x)}{y^2} = \frac{1+0}{y^2} = \frac{1}{y^2}$$

$$(g_{\mathbb{H}^2})_{yy} = g_{\mathbb{H}^2}(\partial_y, \partial_y) = \frac{dx^2(\partial_y,\partial_y) + dy^2(\partial_y,\partial_y)}{y^2} = \frac{0+1}{y^2} = \frac{1}{y^2}$$

$$(g_{\mathbb{H}^2})_{xy} = (g_{\mathbb{H}^2})_{yx} = 0$$

$$g_{\mathbb{H}^2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

símbolos de Christoffel são

$$\Gamma^x_{xx} = 0, \quad \Gamma^x_{yx} = \frac{1}{y}, \quad \Gamma^x_{xy} = \frac{1}{y}, \quad \Gamma^x_{yy} = 0.$$

Para $k = y$, obtemos

$$\Gamma^y_{xx} = -\frac{1}{y} \quad \Gamma^y_{yx} = 0 \quad \Gamma^y_{xy} = 0 \quad \Gamma^y_{yy} = \frac{1}{y},$$

Plano H^2

$$\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\},$$

- Para o plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$, iremos considerar a seguinte métrica

$$g_{\mathbb{H}^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

$$(g_{\mathbb{H}^2})_{xx} = g_{\mathbb{H}^2}(\partial_x, \partial_x) = \frac{dx^2(\partial_x,\partial_x) + dy^2(\partial_x,\partial_x)}{y^2} = \frac{1+0}{y^2} = \frac{1}{y^2}$$

$$(g_{\mathbb{H}^2})_{yy} = g_{\mathbb{H}^2}(\partial_y, \partial_y) = \frac{dx^2(\partial_y,\partial_y) + dy^2(\partial_y,\partial_y)}{y^2} = \frac{0+1}{y^2} = \frac{1}{y^2}$$

$$(g_{\mathbb{H}^2})_{xy} = (g_{\mathbb{H}^2})_{yx} = 0$$

$$g_{\mathbb{H}^2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

símbolos de Christoffel são

$$\Gamma^x_{xx} = 0, \quad \Gamma^x_{yx} = \frac{1}{y}, \quad \Gamma^x_{xy} = \frac{1}{y}, \quad \Gamma^x_{yy} = 0.$$

Para $k = y$, obtemos

$$\Gamma^y_{xx} = -\frac{1}{y} \quad \Gamma^y_{yx} = 0 \quad \Gamma^y_{xy} = 0 \quad \Gamma^y_{yy} = \frac{1}{y},$$

$$y(x) = \sqrt{r^2 - (x+d)^2},$$

no caso onde $\frac{ax}{dt} = 0$ obteríamos uma reta com x =constante.

Plano H^2

$$\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\},$$

- Para o plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$, iremos considerar a seguinte métrica

$$g_{\mathbb{H}^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

$$(g_{\mathbb{H}^2})_{xx} = g_{\mathbb{H}^2}(\partial_x, \partial_x) = \frac{dx^2(\partial_x,\partial_x) + dy^2(\partial_x,\partial_x)}{y^2} = \frac{1+0}{y^2} = \frac{1}{y^2}$$

$$(g_{\mathbb{H}^2})_{yy} = g_{\mathbb{H}^2}(\partial_y, \partial_y) = \frac{dx^2(\partial_y,\partial_y) + dy^2(\partial_y,\partial_y)}{y^2} = \frac{0+1}{y^2} = \frac{1}{y^2}$$

$$(g_{\mathbb{H}^2})_{xy} = (g_{\mathbb{H}^2})_{yx} = 0$$

$$g_{\mathbb{H}^2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

símbolos de Christoffel são

$$\Gamma^x_{xx} = 0, \quad \Gamma^x_{yx} = \frac{1}{y}, \quad \Gamma^x_{xy} = \frac{1}{y}, \quad \Gamma^x_{yy} = 0.$$

Para $k = y$, obtemos

$$\Gamma^y_{xx} = -\frac{1}{y} \quad \Gamma^y_{yx} = 0 \quad \Gamma^y_{xy} = 0 \quad \Gamma^y_{yy} = \frac{1}{y},$$

$$y(x) = \sqrt{r^2 - (x+d)^2},$$

no caso onde $\frac{ax}{dt} = 0$ obteríamos uma reta com x =constante.

$$K = \frac{(\partial_x, \partial_y, \partial_y, \partial_x)}{g_{\mathbb{H}^2}(\partial_x,\partial_x) g_{\mathbb{H}^2}(\partial_y,\partial_y) - g_{\mathbb{H}^2}(\partial_x,\partial_y)} = \frac{-\frac{1}{y^4}}{\frac{1}{y^4}} = -1.$$

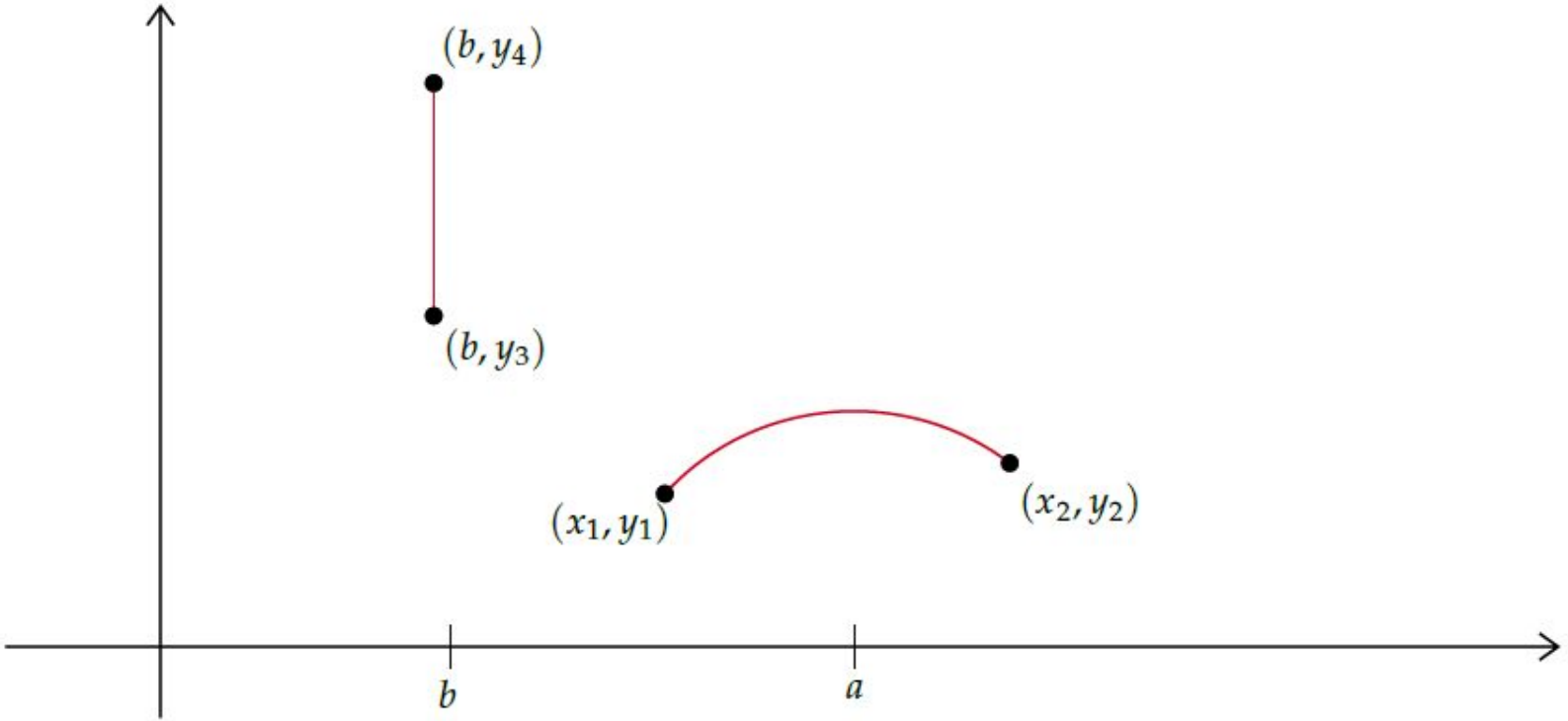


Figura 2.3: Exemplos de duas geodésicas no plano hiperbólico.

Definição 2.3.1. Uma geometria plana Π é um conjunto de cujos elementos são **pontos** e alguns subconjuntos satisfazendo algumas propriedades especiais serão chamados de **retas**.

Definição 2.3.1. Uma geometria plana Π é um conjunto de cujos elementos são **pontos** e alguns subconjuntos satisfazendo algumas propriedades especiais serão chamados de **retas**.

Geometria Hiperbólica

Definição 2.3.1. Uma geometria plana Π é um conjunto de cujos elementos são **pontos** e alguns subconjuntos satisfazendo algumas propriedades especiais serão chamados de **retas**.

Geometria Hiperbólica

(P1) Dados $A, B \in \Pi$, existe uma única reta $r = \overleftrightarrow{AB} \subset \Pi$ tal que $A, B \in r$.

(P2) Cada reta possui pelo menos dois pontos.

(P3) Existem pelo menos três pontos em $A, B, C \in \Pi$ tais que não existe nenhuma reta r com a propriedade $A, B, C \in r$. Tais pontos são chamados de não colineares.

Definição 2.3.1. Uma geometria plana Π é um conjunto de cujos elementos são **pontos** e alguns subconjuntos satisfazendo algumas propriedades especiais serão chamados de **retas**.

Geometria Hiperbólica

(P1) Dados $A, B \in \Pi$, existe uma única reta $r = \overleftrightarrow{AB} \subset \Pi$ tal que $A, B \in r$.

(P2) Cada reta possui pelo menos dois pontos.

(P3) Existem pelo menos três pontos em $A, B, C \in \Pi$ tais que não existe nenhuma reta r com a propriedade $A, B, C \in r$. Tais pontos são chamados de não colineares.

(P4) Para cada reta $r \subset \Pi$ existe uma função $f : r \to \mathbb{R}$ tal que

$$d(A, B) = |f(A) - f(B)|,$$

para todos os pontos $A, B \in \Pi$.

(P5) Dada uma reta r, existem dois subconjuntos Π_1 e Π_2 chamados de lados da reta r, que satisfazem as seguintes propriedades

- Π_1 e Π_2 são convexos.
- $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \Pi_1 \cap r = \Pi_2 \cap r = \emptyset$ e $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup r$.
- Dados $A \in \Pi_1$ e $B \in \Pi_2$, temos que $\overline{AB} \cap r \neq \emptyset$.

Geometria Hiperbólica

Geometria Hiperbólica

(P6) Existe um número real α e uma função m com domínio sendo os ângulos de Π e a imagem os números reais tal que, para cada ângulo $\angle ABC$, vale

- $0 < m(\angle ABC) < \alpha$.
- Se D é um ponto localizado no interior do ângulo $\angle ABC$, então vale

$$m(\angle ABC) = m(\angle ABD) + m(\angle DBC).$$

- Para todo número real $0 < \beta < \alpha$ e reta $r = \overleftrightarrow{AB}$, existe um ponto P em um dos lados de r tal que $m(\angle ABP) = \beta$.

Geometria Hiperbólica

(P6) Existe um número real α e uma função m com domínio sendo os ângulos de Π e a imagem os números reais tal que, para cada ângulo $\angle ABC$, vale

- $0 < m(\angle ABC) < \alpha$.
- Se D é um ponto localizado no interior do ângulo $\angle ABC$, então vale

$$m(\angle ABC) = m(\angle ABD) + m(\angle DBC).$$

- Para todo número real $0 < \beta < \alpha$ e reta $r = \overleftrightarrow{AB}$, existe um ponto P em um dos lados de r tal que $m(\angle ABP) = \beta$.

(P7) Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ tais que $\overline{AB}$ é congruente a $\overline{DE}$ e $\overline{BC}$ é congruente a $\overline{EF}$, e $m(\angle ABC) = m(\angle DEF)$, então temos que ambos os triângulos são congruentes.

Geometria Hiperbólica

(P6) Existe um número real α e uma função m com domínio sendo os ângulos de Π e a imagem os números reais tal que, para cada ângulo $\angle ABC$, vale

- $0 < m(\angle ABC) < \alpha$.
- Se D é um ponto localizado no interior do ângulo $\angle ABC$, então vale

$$m(\angle ABC) = m(\angle ABD) + m(\angle DBC).$$

- Para todo número real $0 < \beta < \alpha$ e reta $r = \overleftrightarrow{AB}$, existe um ponto P em um dos lados de r tal que $m(\angle ABP) = \beta$.

(P7) Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ tais que $\overline{AB}$ é congruente a $\overline{DE}$ e $\overline{BC}$ é congruente a $\overline{EF}$, e $m(\angle ABC) = m(\angle DEF)$, então temos que ambos os triângulos são congruentes.

(P8) Se uma reta r corta duas outras retas r_1 e r_2 e os ângulos interiores de um mesmo lado de r possui soma menor que π, então, quando prolongados o suficiente, r_1 e r_2 se intersectam em algo ponto deste mesmo lado de r.

Modelo (validação de consistência)

Modelo (validação de consistência)

Tomaremos $\Pi = \mathbb{H}^2$ e as retas $r \subset \mathbb{H}^2$ serão os seguintes conjuntos

- $r_a = \{(a, y) \in \mathbb{H}^2 : x = a, y > 0\}$.
- $r_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2 : (x - a)^2 + y^2 = b^2\}$.

$$r_a(t) = (a, y_1 + t(y_1 - y_2))$$

$$r_{ab}(t) = (a + b\text{tgh}(t), b\text{sech}(t))$$

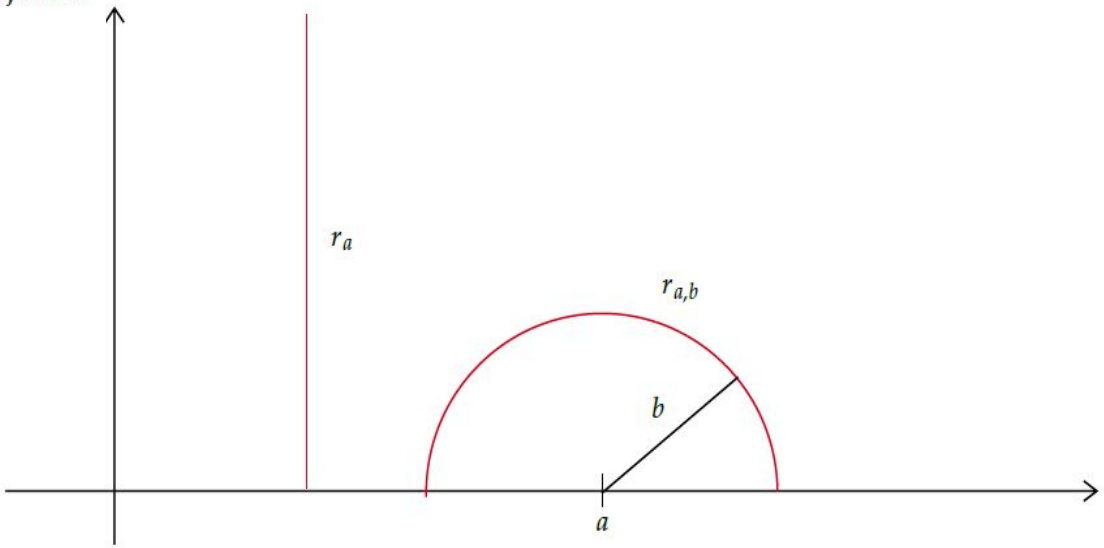
Modelo (validação de consistência)

Tomaremos $\Pi = \mathbb{H}^2$ e as retas $r \subset \mathbb{H}^2$ serão os seguintes conjuntos

- $r_a = \{(a, y) \in \mathbb{H}^2 : x = a, y > 0\}$.
- $r_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2 : (x - a)^2 + y^2 = b^2\}$.

$$r_a(t) = (a, y_1 + t(y_1 - y_2))$$

$$r_{ab}(t) = (a + b\text{tgh}(t), b\text{sech}(t))$$



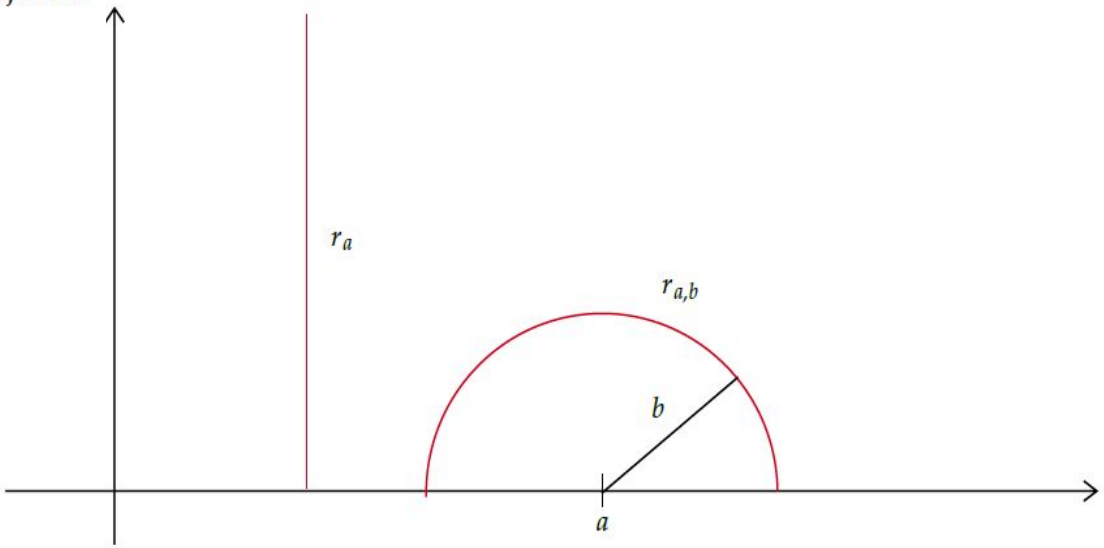
Modelo (validação de consistência)

Tomaremos $\Pi = \mathbb{H}^2$ e as retas $r \subset \mathbb{H}^2$ serão os seguintes conjuntos

- $r_a = \{(a, y) \in \mathbb{H}^2 : x = a, y > 0\}$.
- $r_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2 : (x - a)^2 + y^2 = b^2\}$.

$$r_a(t) = (a, y_1 + t(y_1 - y_2))$$

$$r_{ab}(t) = (a + b\text{tgh}(t), b\text{sech}(t))$$



Defina a função $d : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} |\ln(y_2) - \ln(y_1)|, & x_1 = x_2 \\ |\ln(y_2) - \ln(y_1) + \ln(x_1 - a + b) - \ln(x_2 - a + b)|, & (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in r_{a,b}. \end{cases}$$

Ângulo

Ângulo

$$v_{AB} = \operatorname{sgn}(t_1 - t_2)(\operatorname{sech}(t_1), -\operatorname{tgh}(t_1)).$$ se x1 =/= x2

$$v_{BA} = \operatorname{sgn}(x_2 - x_1)\left(\frac{y_2}{b}, \frac{a - x_2}{b}\right).$$ c.c

Portanto, o ângulo na geometria hiperbólica é o número real θ tal que

$$\cos(\theta) = v_{BA} \cdot v_{BC}.$$

Ângulo

$$v_{AB} = \operatorname{sgn}(t_1 - t_2)(\operatorname{sech}(t_1), -\operatorname{tgh}(t_1)).$$ se x1 =/= x2

$$v_{BA} = \operatorname{sgn}(x_2 - x_1)\left(\frac{y_2}{b}, \frac{a - x_2}{b}\right).$$ c.c

Portanto, o ângulo na geometria hiperbólica é o número real θ tal que

$$\cos(\theta) = v_{BA} \cdot v_{BC}.$$

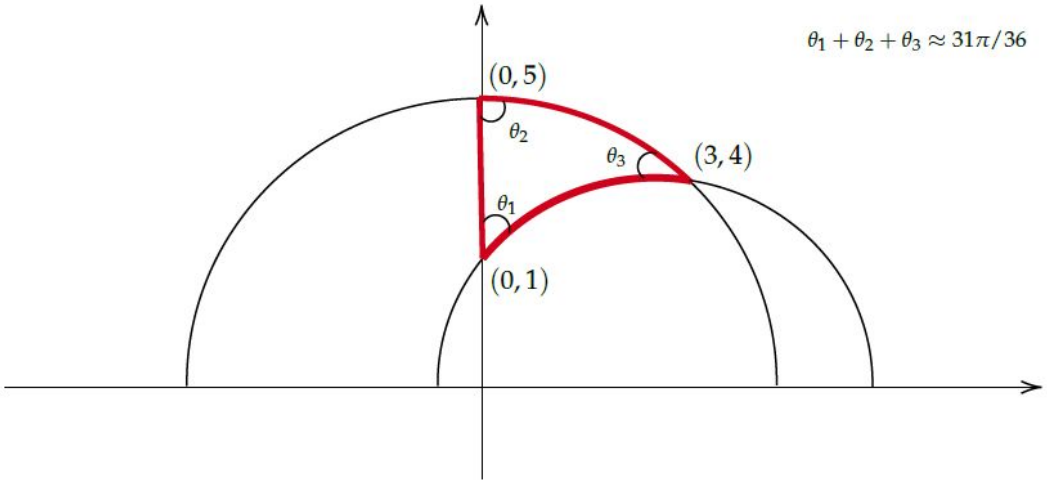


Figura 2.5: Um triângulo cuja soma dos ângulos é estritamente menor que π.

Geometria Elíptica

Geometria Elíptica

3 axiomas de Incidência
7 axiomas de Separação
8 axiomas de Congruência

Geometria Elíptica

3 axiomas de Incidência
7 axiomas de Separação
8 axiomas de Congruência

Axiomas de Separação:

Ax.S1: Se (A,B|C,D), então os pontos A, B, C e D são colineares e distintos
Ax.S2: Se (A,B|C,D), então (C,D|A,B) e (B,A|C,D)
Ax.S3: Se (A,B|C,D), então não ocorre (A,C|B,D)
Ax.S4: Se A, B, C e D são colineares e distintos então (A,B|C,D) ou (A,C|B,D) ou (A,D|B,C)
Ax.S5: Se os pontos A, B e C são colineares e distintos então existe D tal que (A,B|C,D)
Ax.S6: Se A, B, C, D e E são colineares, distintos e (A,B|D,E) então (A,B|C,D) ou (A,B|C,E)
Ax.S7: Se (A,B|C,D), então (A',B'|C',D'), onde A', B', C' e D' são os pontos correspondentes a A, B, C, e D sobre uma perspectiva*.

Geometria Elíptica

Axiomas de Congruência:

Geometria Elíptica

Axiomas de Congruência:

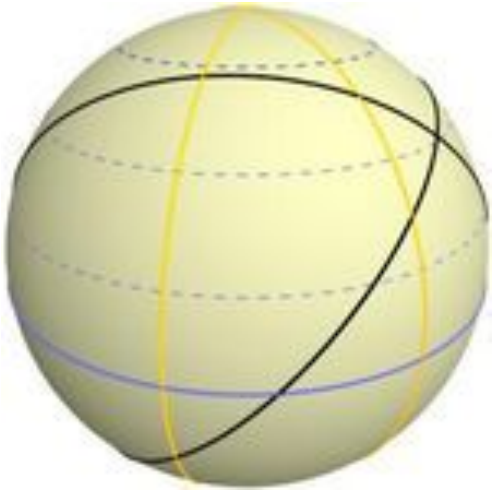
Ax.c1: Cada segmento é congruente a si próprio
Ax.c2: Se [AB]~[CD] então [CD]~[AB]
Ax.c3: Se [AB]~[CD] e [CD]~[EF] então [AB]~[EF]
Ax.c4: Se [AB]~[CD] então [BA]~[DC]
Ax.c5: Se [AB]~[BA] então A é antipodal a B
Ax.c6: Se A e A' são pontos antipodais, então [AA']~[A'A]
Ax.c7: Se [AB]~[EF] e existe um ponto X em [AB] então existe um ponto Y em [EF] tal que [XB]~[YF]
Ax.c8: (LAL) Se dois lados e o ângulo entre eles de um triângulo são congruentes a dois lados e o ângulo entre eles em outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

Modelo (validação de consistência)

Tomaremos $\Pi = \mathbb{S}^2$ e as retas $r \subset \mathbb{S}^2$ serão os grandes círculos

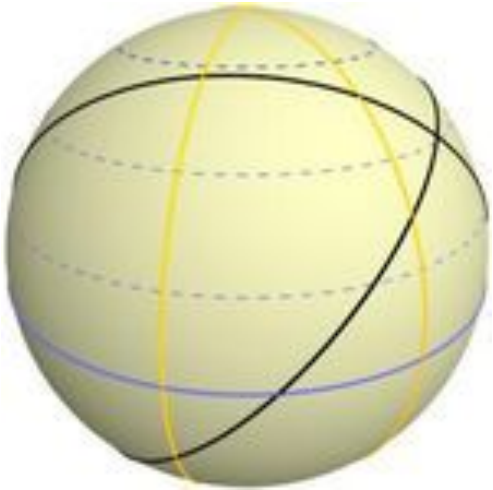
Modelo (validação de consistência)

Tomaremos $\Pi = \mathbb{S}^2$ e as retas $r \subset \mathbb{S}^2$ serão os grandes círculos



Modelo (validação de consistência)

Tomaremos $\Pi = \mathbb{S}^2$ e as retas $r \subset \mathbb{S}^2$ serão os grandes círculos



função distância $d : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$

$$d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \cos^{-1}(|(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2)|)$$

Ângulo

Ângulo

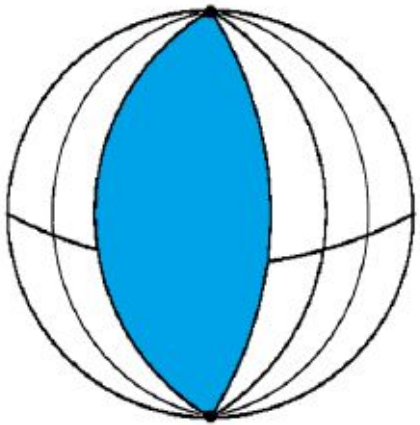


Figure 10 A lune.

Possibilidade de criar polígono de dois lados (Bi-ângulos ou Lunas)

Ângulo

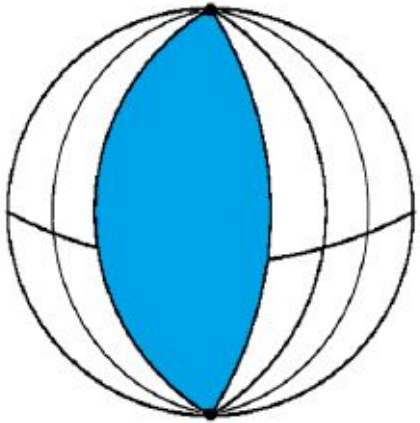


Figure 10 A lune.

Possibilidade de criar polígono de dois lados (Bi-ângulos ou Lunas)

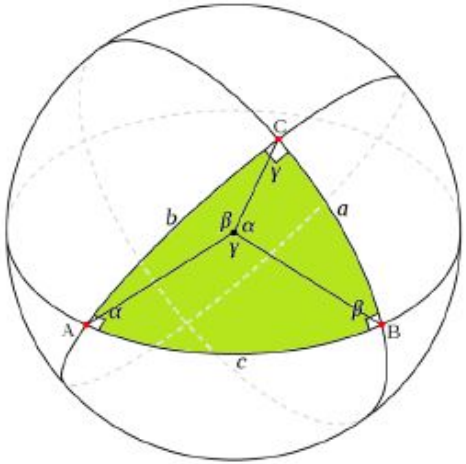
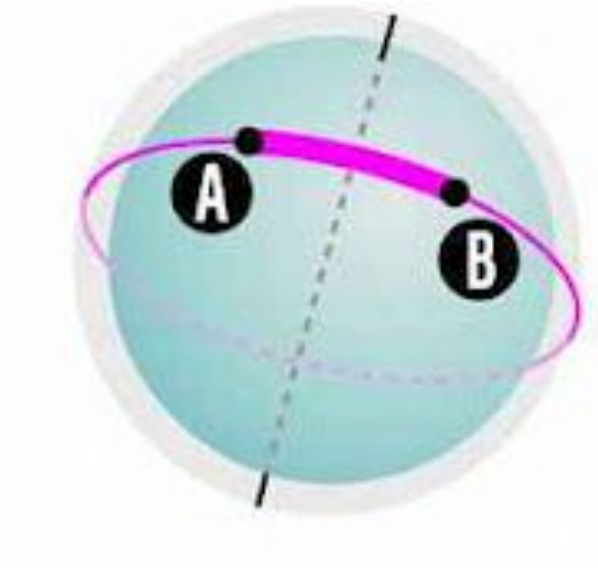


Figure 17 A triangle with three right angles.

Triângulo com a soma dos ângulos internos maior que 180°

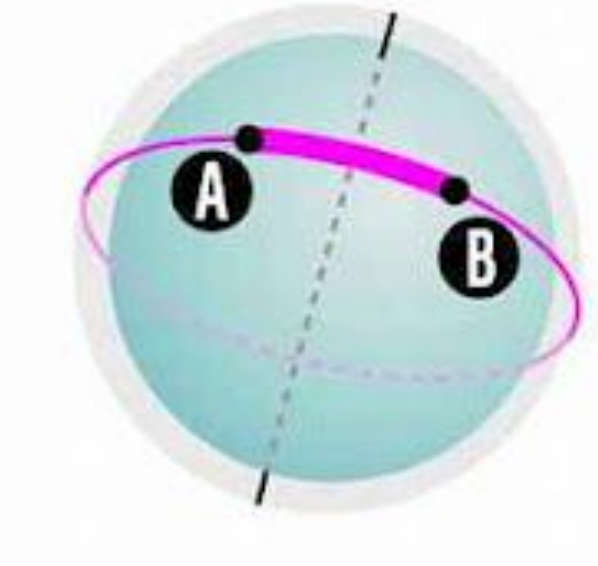
Globo terrestre

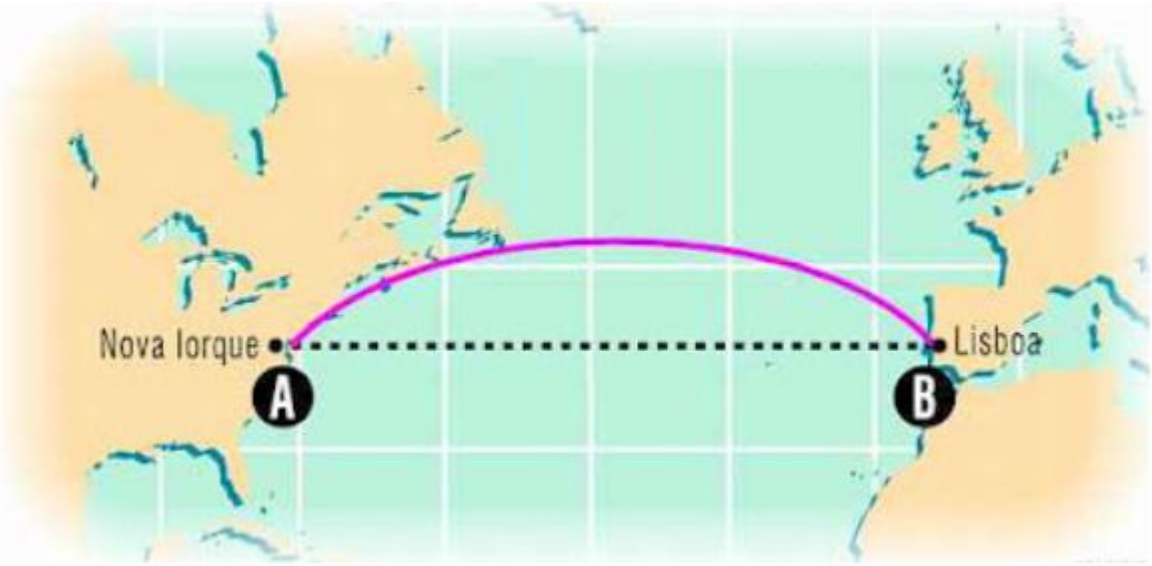
Aplicação - As rotas de vôo seguem as curvas geodésicas para minimizar o percurso entre duas cidades.



Globo terrestre

Aplicação - As rotas de vôo seguem as curvas geodésicas para minimizar o percurso entre duas cidades.





Referências

ADKISSON, W. Geodesics of Hyperbolic Space (2014)

ALMEIDA, F. R. T. Geometria Não Euclidiana - Notas de Aula IME-USP (2011)

BARBOSA, J. L. Geometria Hiperbólica - 20o Colóquio de Matemática (1995)

BIEZUNER, R. J. Geometria Riemanniana - Notas de Aula UFMG (2017)

CARMO, M. P. Geometria Riemanniana - Rio de Janeiro: IMPA, Proj. Euclides 3a ed. (2005)

CARMO, M. P. Geometrias não Euclidianas - Revista de Mat. Univ., vol 6 (1987)

EUCLIDES. Os Elementos - Tradução Irineu Bicudo, UNESP (2009)

LEE, J. M. Introduction to Riemannian Manifolds - Springer (2018)

MALKOUN, J. A few simple facts about the hyperbolic plane (2008)

MAY, J. A Brief Survey of Elliptic Geometry - The University of West Florida (2012)

TU, L. W. An Introduction to Manifolds (Second edition) - Springer (2010)